دانشگاه تهران
دانشکدگان فنی
دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی

گزارش پروژه پنجم درس ژئودزی هندسی

دوره کارشناسی–سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

تعیین موقعیت روی بیضوی و سرشکنی شبکه ژئودتیک سه بعدی

دانشجـــــویان:

محمد سلمانی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۳۹۸۰۸۳

گلسا طالبی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۳۹۸۰۹۰

یاسمن بوستانی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۳۹۸۰۷۰

مرداد ماه ۱۴۰۱

فهرست مطالب

مقدمه ۳

تعیین تعداد مشاهدات، مجهولات و درجه آزادی ۳

۱. تعداد مجهولات ۴

۲. تعداد مشاهدات ۴

۳. درجه آزادی ۴

یافتن مقادیر اولیه برای مجهولات ۴

تشکیل ماتریس طرح ۵

۱. ماتریس طرح مشاهدات طول ۵

۲. ماتریس طرح مشاهدات زاویه قائم ۵

۳. ماتریس طرح مشاهدات زاویه افقی ۷

۴. ماتریس طرح مشاهده آزیموت ۷

۵. ماتریس طرح مشاهدات خط مبنا ۷

۶. ماتریس طرح مشاهده موقعیت ۸

تشکیل بردار مشاهدات ۸

تشکیل ماتریس وزن ۸

حل مسئله کمترین مربعات ۹

تبدیل مختصات کارتزین به ژئودتیک ۱۰

مقدمه

در پروژه های ابتدایی در مورد بیضوی به طور مشروح تری بحث شد. بیضوی بهترین برازش شکل هندسی به زمین است که میتواند برآورد بسیار نزدیکی از سطح واقعی زمین را به ما نمایش دهد. تعیین موقیت روی سطح بیضوی نیز یکی از پر کاربرد ترین اعمالی است که روی بیضوی انجام میپذیرد.

در سال های دور یکی از اصلی ترین اهداف تشکیل شبکه های ژئودتیک و تعیین موقعیت روی بیضوی، تهیه نقشه بود. در حال حاضر نیز تهیه نقشه ها در ابعاد و مقیاس های مختلف تا اندازه زیادی به مختصات ژئودتیک وابسته است.

اما با گذشت زمان نیاز به این مختصات و تعیین موقعیت روی بیضوی نسبت به گذشته بیشتر شد و در کاربرد های بیشتری استفاده از تکنیک های اندازه گیری مختصات روی بیضوی مورد توجه قرار گرفت. تعدادی از کاربرد های مختصات ژئودتیک شامل تعیین مرز ها، مدیریت شهری، پروژه های مهندسی، هیدروگرافی، اکولوژی، ارزیابی بلایای طبیعی مثل زلزله و ... است.

در این پروژه نیز به بهره گیری از تکنیک تعیین موقعیت روی بیضوی با استفاده از مشاهدات مختلف طول، زاویه قائم، زاویه افقی، آزیموت، خط مبنا و مشاهدات مربوط به تعیین مختصات خواهیم پرداخت. هدف از انجام این پروژه سرشکنی شبکه های سه بعدی و برآورد مختصات کارتزین سه بعدی نقاط شبکه و تعیین موقعیت آنها بر روی بیضوی با استفاده از روش کمترین مربعات است.

تعیین تعداد مشاهدات، مجهولات و درجه آزادی

برای اینکه بتوان مسئله کمترین مربعات را حل کرد باید در ابتدا تعداد مجهولات و معادلات را به دست آورد. با استفاده از آنها به تعیین درجه آزادی پراخت. در صورتی که درجه آزادی بزرگتر از صفر شد، مسئله قابل حل است. در این شبکه ژئودزی، تعداد معادلات و مجهولات به شرح زیر است:

۱. تعداد مجهولات

- شبکه دارای ۱۰ نقطه است که مختصات همه آنها مجهول است. بنـابراین **تعداد مجهــولات** برابـر **۳۰** است.

۲. تعداد مشاهدات

- مشاهدات طول مایل: ۶۰
- مشاهدات زاویه قائم: ۶۰
- مشاهدات زاویه افقی: ۶۲
- مشاهده آزیموت: ۱
- مشاهدات خط مبنا: ۵۴
- مشاهده موقعیت نقطه اول: ۳

مجموعا تعداد مشاهدات یا به بیان بهتر، تعداد معادلات مربوط به مشاهدات برابر **۲۴۰** است.

۳. درجه آزادی

درجه آزادی برابر است با تفاضل تعداد مجهولات از تعداد معادلات. بنابراین:

$$Df = 240 - 30 = 210$$

یافتن مقادیر اولیه برای مجهولات

برای حل مسئله کمترین مربعات غیر خطی نیاز است تا مقادیر اولیه برای مجهولات را یافت. بـه ایـن منظـور از مختصات معلوم نقطه اول و مشاهدات خط مبنا استفاده میکنیم.

بـرای مثـال سـطر اول، مشـاهده خـط مبنـا مربـوط بـه دونقطـه ۱ و ۴ را در نظـر بگیریـد. درایـن مشـاهده $\Delta x_{14}\ \Delta y_{14}\ \Delta z_{14}$ به ما داده شده است. در مشاهده موقعیت هم موقعیت نقطه یک $(x_1\ y_1\ z_1)$ به مـا داده شده است. باتوجه به معادلات خط مبنا می‌توان موقعیت نقطه ۴ را محاسبه کرد. $(x_4\ y_4\ z_4)$

تشکیل ماتریس طرح

برای حل مسئله به روش کمترین مربعات یکی از گام های اصلی، تهیه ماتریس طرح است. با توجه به قسمت قبلی و تعیین تعداد مشاهدات و مجهولات، ماتریس دارای ابعاد $A_{240\times30}$ خواهد بود. بنابراین در ادامه به تشکیل این ماتریس خواهیم پرداخت.

۱. ماتریس طرح مشاهدات طول

رابطه مربوط به طول مایل به شرح زیر است:

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

همانطور که مشاهده میشود این مشاهده غیر خطی بوده و برای به دست آوردن مولفه های ماتریس طرح برای آن، باید از رابطه آن بر حسب مجهولات، یعنی مختصات نقاط اول و دوم مشتق گرفت. این کار با استفاده از رابطه های داده شده برای مشتقات امکان پذیر است. بنابراین در نهایت مقادیر به دست آمده برای قرار دادن در درایه های ماتریس طرح برای طول افقی به شرح زیر است:

$$A = [g_{31}, g_{32}, g_{33}]$$

مقادیر ذکر شده باید برای هر دو مختصات دخیل در یک طول مایل اندازه گیری شود. به این صورت که برای مختصات نقطه دوم، مقادیر درایه های ماتریس دقیقا قرینه شده و در مکان مربوط به خود قرار میگیرد.

در تعیین اینکه کدام طول مربوط به کدام مختصات است باید از ماتریس S کمک گرفت. به این صورت که درایه هایی که دارای مقادیر طول هستند، اندیسشان ذخیره میشود تا در ادامه از آن استفاده شود.

۲. ماتریس طرح مشاهدات زاویه قائم

هر جا مشاهده طول داریم، در همان جهت مشاهده زاویه قائم را نیز اندازه گیری کرده ایم. به همین سبب ۶۰ عدد مشاهده زاویه قائم نیز داریم. مشاهدات زاویه از رابطه زیر قابل محاسبه است:

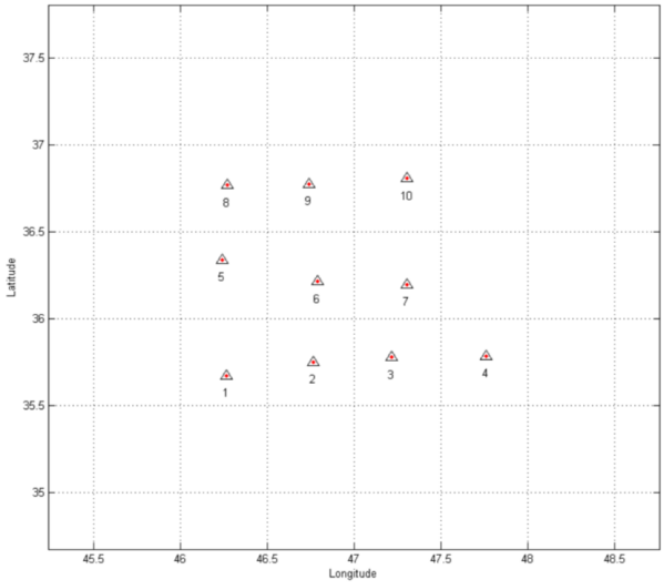
$$\beta_{AB} = \sin^{-1}\left(\frac{cos\varphi_A\, cos\lambda_A\, \Delta x + cos\varphi_A\, sin\lambda_A\, \Delta y + sin\varphi_A\, \Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}\right)$$

پس از گرادیان گیری، مقادیر زیر را در ماتریس طرح قرار میدهیم.

$$A = [g_{21}, g_{22}, g_{23}]$$

برای مشاهدات زاویه قائم نیز مانند مشاهدات طول مایل دو نقطه دخیل هستند، باید دو سری از درایه های بالا را در ماتریس طرح قرار داد.

لازم به ذکر است که برای به دست آوردن مقادیر مشخص شده در بالا، میبایست مقادیر اولیه برای ϕ, λ به دست آوریم. برای به دست آوردن این مقادیر از نمودار داده شده در شکل زیر استفاده میکنیم.



مقادیر استفاده شده به عنوان مقادیر اولیه عرض و طول جغرافیایی نقاط مجهول به شرح زیر است:

$$\phi_0 = \left(\frac{\pi}{180}\right) * [35.65\ 35.7\ 35.75\ 35.8\ 36.4\ 36.25\ 36.2\ 36.75\ 36.75\ 36.8]$$

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi}{180}\right) * [46.25\ 46.75\ 47.2\ 47.75\ 46.2\ 46.8\ 47.35\ 46.25\ 46.75\ 47.3]$$

۳. ماتریس طرح مشاهدات زاویه افقی

مشاهدات زاویه افقی نیز از جمله مشاهدات غیر خطی هستند. این مشاهدات از تفاضل دو آزیموت در دو جهت به دست میایند. به همین دلیل باید با استفاده از مشاهدات گرادیان داده شده، برای دو جهت مقادیر مربوط به به ماتریس طرح را محاسبه میکنیم.

کد این قسمت در قسمت مربوط به Horizontal Angle آورده شده است.

۴. ماتریس طرح مشاهده آزیموت

یک عدد مشاهده آزیموت داریم. رابطه مربوط به آزیموت به شرح زیر است:

$$\alpha_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{-sin(\lambda_1) * (x2 - x1) + cos(\lambda_1) * (y2 - y1)}{\left(-sin(\phi_1) * cos(\lambda_1) * (x2 - x1) - sin(\phi_1) * sin(\lambda_1) * (y2 - y1) + cos(\phi_1) * (z2 - z1)\right)}\right)$$

همانطور که مشاهده میشود، این رابطه غیر خطی است و برای به دست آوردن درایه های ماتریس طراح میبایست از آن بر حسب مولفه های مختصات گرادیان گیری کنیم. با استفاده از روابط گرادیان گیری g، مقدار متناسب با این مشاهده را در ماتریس طرح قرار میدهیم.

۵. ماتریس طرح مشاهدات خط مبنا

مشاهدات خط مبنا دارای سه معادله برای اختلاف x، y و z است. ۱۸ معادله برای خط مبنا داریم که هر یک از مشاهدات آن سه معادله به ما میدهد. بنابراین در مجموع ۵۴ مشاهده خط مبنا داریم.

$$\Delta x_{12} = (x_1 - x_2)$$

همانطور که مشاهده میشود، این مشاهدات خطی هستند و به راحتی میتوان از آنها مشتق گرفت.

۶. ماتریس طرح مشاهده موقعیت

مختصات نقطه اول برآورد شده است و به عنوان یکی از معلومات مسئله آورده شده است. اما مختصات این نقطه را نیز باید دوباره برآورد کرد. به همین منظور سه معادله مربوط به مولفه های مختصات ایـن نقطـه آورده شـده است. گرادیان این معادلات نسبت به مولفه های مختصات، برابر ۱ است که در جـای صـحیح خـود در مـاتریس طرح A قرار میگیرد.

تشکیل بردار مشاهدات

برای حل مسئله کمترین مربعات غیر خطی میبایست اختلاف مشاهدات را داشته باشیم. این اختلاف متشکل از تفاضل دو بردار مشاهدات داده شده و مشاهدات برآورد شده است.

بیشتر مشاهدات داده شده در ماتریس هایی که به عنوان داده در نظر گرفته شده بود، قرار دارند. برای به دسـت آوردن بردار مشاهدات برآورد شده از رابطه داده شده برای هر نوع معادله استفاده شد. بردار اخـتلاف مشـاهدات در برداری با نام delta_L ذخیره شد.

تشکیل ماتریس وزن

برای تشکیل ماتریس وزن نیاز است تا در ابتدا ماتریس واریانس-کواریانس هر یک از مشاهدات را داشته باشیم و سپس آن را معکوس کنیم تا ماتریس وزن حاصل شود. شماتیکی از ماتریس وزن هر یک از مشاهدات در ادامـه آورده شده است.

۱. مشاهدات طول: ماتریسی مربعی با ابعاد ۶۰ است که روی قطر اصلی آن اعداد $\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)^{۲}}$ وجود دارند.
۲. مشاهدات زاویه قائم: ماتریسی مربعی با ابعاد ۶۰ است که روی قطر اصلی آن اعداد 4.25×10^{10} وجود دارد.
۳. مشاهدات زاویه افقی: ماتریسی مربعی با ابعاد ۶۲ اسـت کـه روی قطـر اصـلی آن اعـداد 4.25×10^{10} وجود دارد.

۴. مشاهده آزیموت: ماتریسی مربعی با ابعاد ۱ است که روی قطر اصلی آن عدد 4.25×10^{10} وجود دارد.
۵. مشاهدات خط مبنا: خط مبنا علاوه بر واریانس، بین مشاهدات خود وابستگی نیز دارد که باعث میشود تا کواریانس بین مشاهدات وجود داشته باشد. به همین دلیل هر یک از ۱۸ مشاهده خط مبنا دارای یک ماتریس واریانس-کواریانس ۳×۳ هستند. این ماتریس با نام Q ذخیره شده است.
۶. مشاهده تعیین موقعیت: آخرین مشاهده، مشاهده تعیین موقعیت برای نقطه اول است. این مشاهده دارای سه معادله است که باعث ساخته شدن یک ماتریس ۳×۳ میشود. روی قطر اصلی این ماتریس اعداد 0.04^2 و روی درایه های دیگر ماتریس اعداد 0.01^2 وجود دارد.

در نهایت ماتریس وزن متشکل از ماتریس های توضیح داده شده در ادامه است که ابعاد آن **۲۴۰×۲۴۰** میباشد.

حل مسئله کمترین مربعات

در ادامه با استفاده از ماتریس طرح، ماتریس وزن و ماتریس مشاهدات، اقدام به حل مسئله کمترین مربعات غیر خطی به صورت تکراری میکنیم. برای حل از رابطه زیر استفاده میکنیم.

$$\Delta X = (A^T W A)^{-1} (A^T W \Delta L)$$

پس از این مرحله اقدام به آپدیت کردن مقادیر مربوط به مجهولات میکنیم. پس از به روز رسانی مجهولات، دوباره فرآیند توضیح داده شده را، این بار با مختصات جدید به دست آمده برای مجهولات ادامه میدهیم.

این چرخه را تا جایی ادامه میدهیم که دقت مشاهدات بیشتر از 10^{-9} شود.

مختصات کارتزین به دست آمده برای مجهولات، پس از برآورد آنها با استفاده از مسئله کمترین مربعات به شرح زیر است.

NO. of Station	X	Y	Z	Δx	Δy	Δz
1	3586785.99	3749043.74	3699770.16	5.69E-18	-1.73E-18	1.91E-18
2	3550727.69	3776848.78	3706977.47	8.86E-11	1.05E-10	-1.46E-10
3	3519810.66	3803270.56	3709390.07	5.52E-11	-2.19E-10	-4.10E-11

4	3483128.49	3836172.94	3710183.04	1.85E-10	2.04E-10	1.13E-10
5	3558471.94	3716141.43	3759638.82	1.99E-10	-6.61E-11	-5.37E-12
6	3528570.83	3756357.11	3748769.32	-1.57E-10	-3.29E-11	6.00E-11
7	3495192.78	3788676.25	3747002.68	-9.28E-11	9.71E-11	-1.80E-10
8	3536798.72	3697314.02	3797737.49	1.92E-10	6.75E-11	-2.32E-11
9	3506447.85	3726173.55	3798860.42	1.68E-10	2.95E-11	1.08E-10
10	3468083.39	3759317.23	3801759.86	2.47E-11	1.55E-10	2.97E-11

تبدیل مختصات کارتزین به ژئودتیک

در این مرحله مختصات برآورد شده را با استفاده از تابع متلبی ecef2geodetic تبدیل به طول و عرض ژئودتیک میکنیم. این مختصات در ادامه آورده شده اند.

NO. of Station	Latitude	Longitude
1	35.67373611	46.26709167
2	35.75085827	46.76752497
3	35.77780272	47.2166833
4	35.78640833	47.76150553
5	36.33969996	46.24163057
6	36.21489722	46.79095003
7	36.19719721	47.3073278
8	36.76881667	46.27110831
9	36.77667222	46.74009999
10	36.80785834	47.30753049