دانشگاه تهران

دانشکدگان فنی

دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی

گزارش پروژه دوم درس ژئودزی هندسی

دوره کارشناسی–سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

محاسبه محیط و طول کمان بیضی با استفاده از حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

دانشجـــــویان:

محمد سلمانی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۳۹۸۰۸۳

گلسا طالبی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۳۹۸۰۹۰

یاسمن بوستانی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۳۹۸۰۷۰

خرداد ماه ۱۴۰۱

مقدمه

در بسیاری از علم ها به خصوص علم ژئودزی هندسی، با مسائلی رو به رو میشـویم کـه نمیتـوان آن را بـا روش های تحلیلی حل کرد یا حل این گونه از مسائل با روش های تحلیل بسیار سخت و ناممکن است.

این گونه مسائل شامل حل انتگرال، معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه (ODE) یا محاسبه مشتق عـددی برخی توابع است. به این منظور استفاده از روش های عددی مورد توجه قرار میگیرد. در این تمرین، هدف حـل انتگرال مربوط به محاسبه محیط بیضی است. برای حل این انتگرال در ابتـدا آن را بـه یـک معادلـه دیفرانسـیل تبدیل کرده و در حقیقت آن را تبدیل به یک مسئله مقدار اولیه (IVP) میکنیم.

پس از آماده شدن مسئله مقدار اولیه با استفاده از روش های عددی، اقدام به حـل معادلـه مـورد نظـر کـرده و مجموعه نقاطی را که به عنوان بهترین تقریب با استفاده از روش های عددی محاسبه شده اند، به دست میاوریم.

در این تمرین از سه روش زیر برای حل عددی مسئله استفاده خواهیم کرد:

1. روش اولر
2. روش هیون
3. روش رونگه-کوتای مرتبه ۴

توضیح کد نوشته شده

همانطور که گفته شد، هدف از حل این تمرین، حل عددی رابطه انتگرالـی محـیط بیضـی معـروف بـه انتگـرال بیضوی معین است. به این منظور از روش های عددی مثل اولر، هیون و رونگه کوتای مرتبه ۴ استفاده خـواهیم کرد. در حل این تمرین مقادیر قطر های بزرگ و کوچک بیضی، برابر با بیضوی مرجع زمین یعنی WGS84 در نظر گرفته شد.

در ابتدای این برنامه از کاربر روش مورد نظر را میخوایم. این کار را با دستور input انجام میدهیم. سپس به طور کلی کد نوشته شده را به سه قسمت تقسیم میکنیم. قسمت اول کد مربوط به روش اولر، قسمت دوم کد، مربوط به روش هیون و قسمت سوم کد مربوط به روش رونگه کوتای مرتبه ۴ خواهد بود.

در این تمرین از دو تابع در کد اصلی استفاده کردیم. این توابع با نام های p2_f و p2_ki شناخته میشود. در ادامه به توضیح مختصر هر یک از آنها خواهیم پرداخت.

تابع p2_f: مربوط به تابع اصلی f خواهد شد که همان تابع داخل انتگرال بیضوی معین است. ورودی این تابع، متغیر t که همان عرض کاهش یافته(ψ) است، خواهد بود.

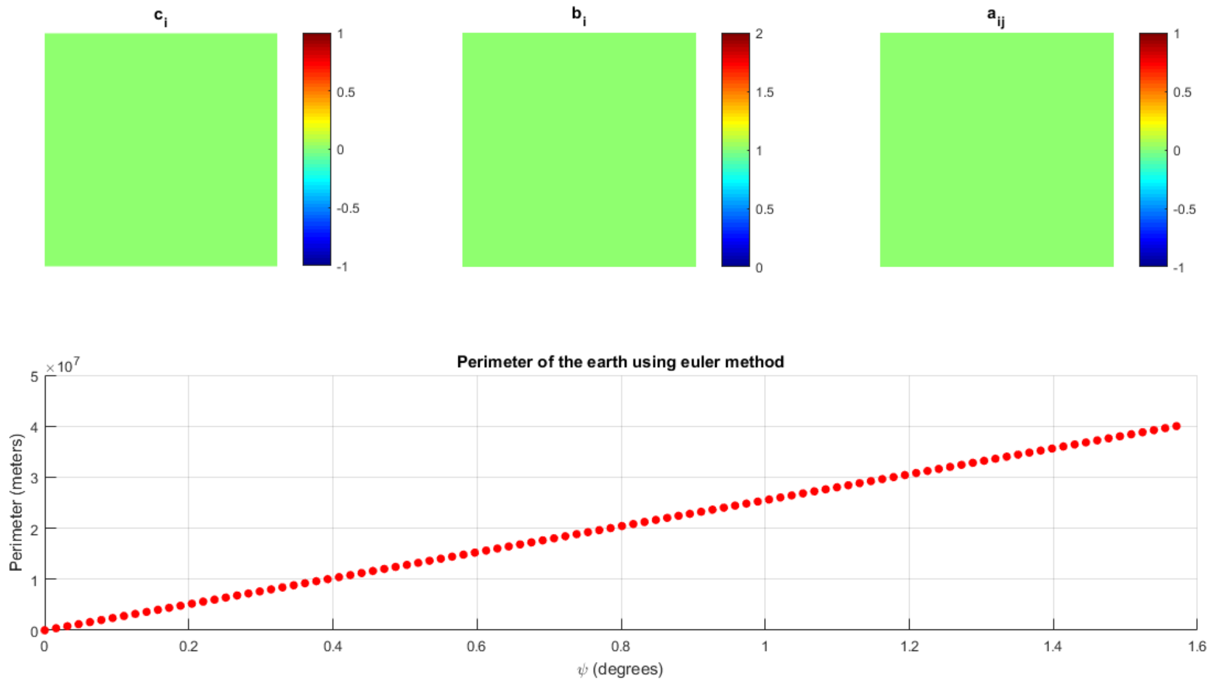
تابع p2_ki: این تابع مربوط به محاسبه اجزای روش رونگه کوتا است. در این تابع K_i های مربوط به روش رونگه کوتا محاسبه میشود. از این تابع در قسمت مربوط به کد هیون و قسمت مربوط به رونگه کوتای مرتبه ۴ استفاده کردیم.

برای هر یک از قسمت های کد، یعنی برای روش های مختلف قسمت نمایش داده ها نیز با استفاده از دستورات plot و semilogy انجام شده است. ردیف اول هر یک از عکس ها مربوط به نمایش ضرایب هر یک از روش ها در جدول بوچر است. ردیف دوم تصویر نیز مربوط به خروجی نهایی محیط بیضی بر حسب پارامتر عرض کاهش یافته است.

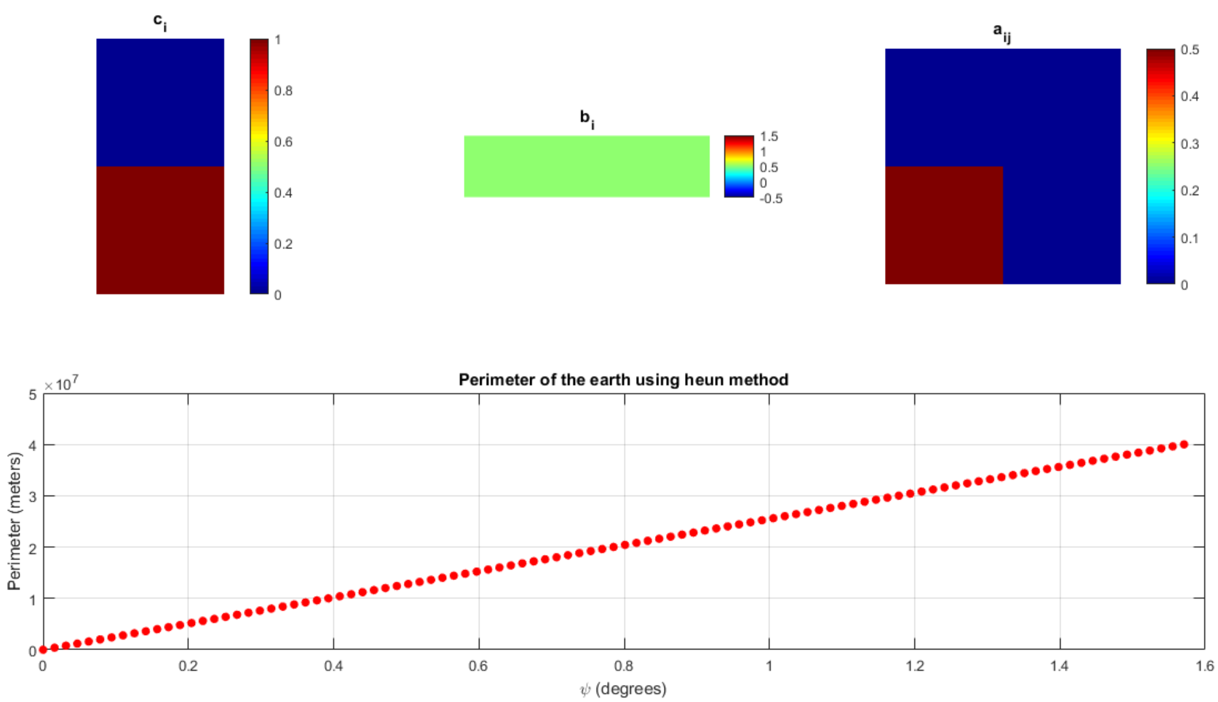
بخش سوالات

حل انتگرال بیضوی معین به سه روش عددی و مقایسه مقادیر آنها

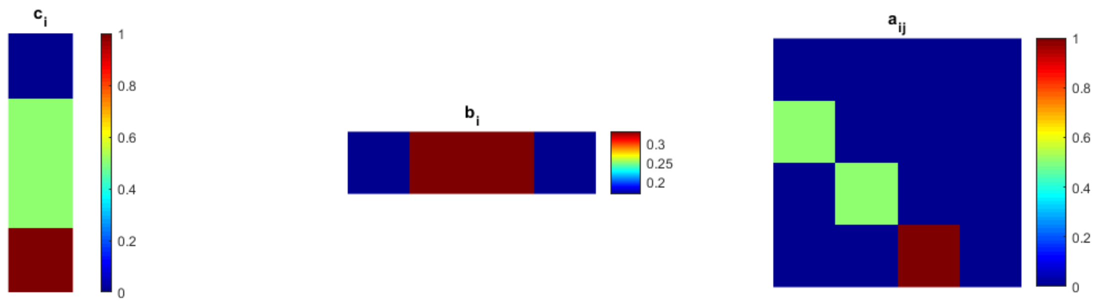
الف) پس از حل انتگرال به روش اولر، مقادیر عددی زیر به دست آمد که در شکل زیر قابل رویت است.

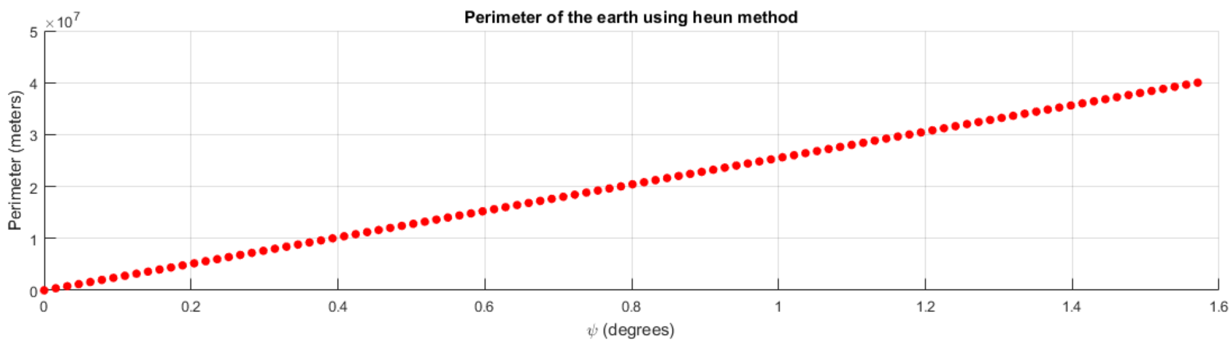


پس از حل انتگرال به روش هیون، مقادیر عددی زیر به دست آمد که در شکل زیر قابل رویت است.



پس از حل انتگرال به روش رونگه کوتا مرتبه ۴، مقادیر عددی زیر به دست آمد که در شکل زیر قابل رویت است.

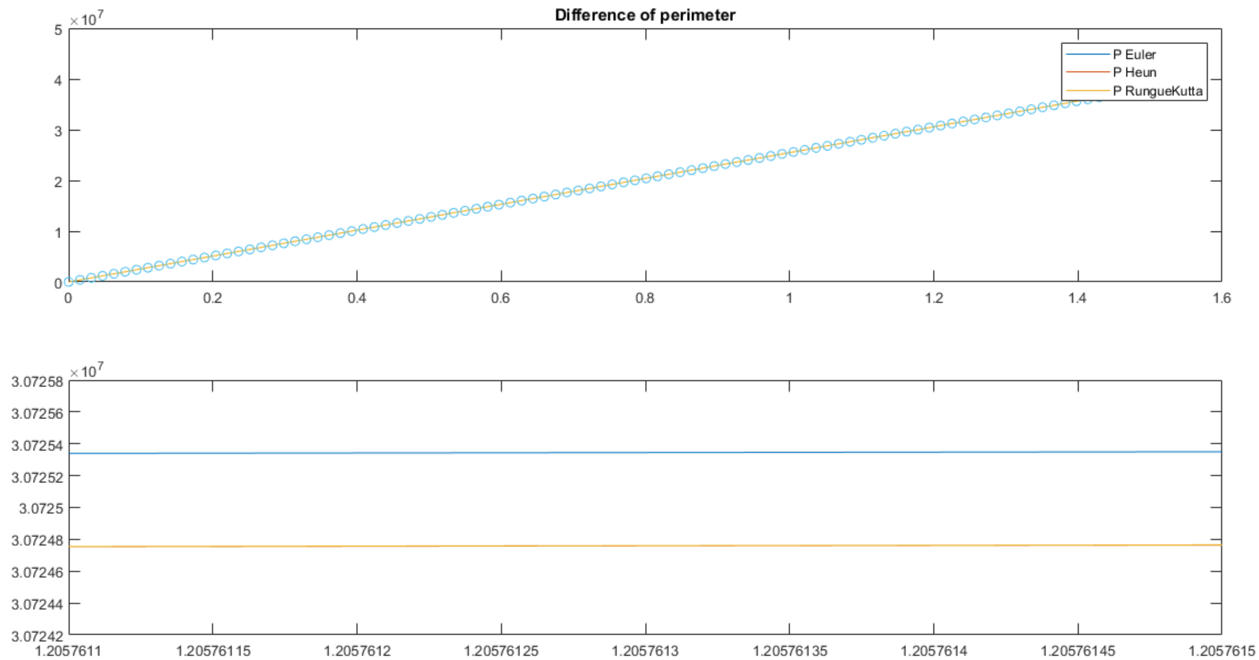




محیط بیضی به دست آمده برای بیضوی مرجع WGS84 با روش های مختلف عددی بـه صـورت زیـر محاسـبه شد.

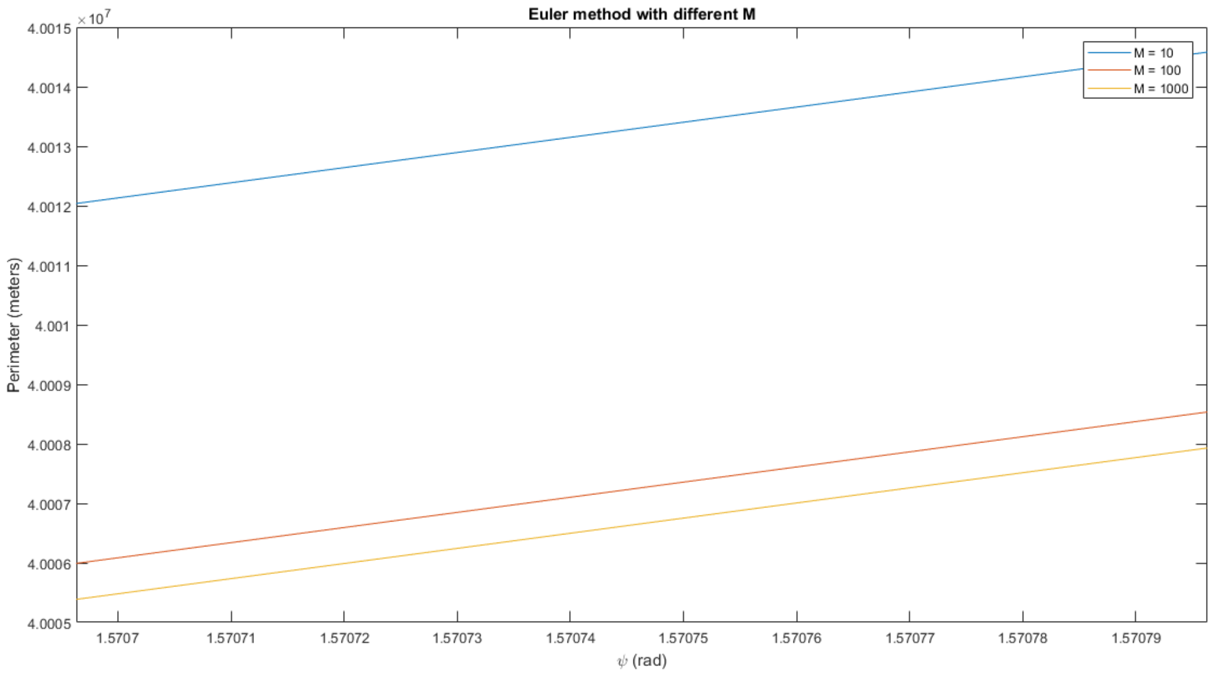
	روش اولر	روش هیون	روش رونگه کوتا
محیط بیضی زمین (متر)	۴۰۰۰۸۵۳۴,۷۳۶۸۲۷۲	۴۰۰۰۷۸۶۲,۹۱۷۱۰۹۱	۴۰۰۰۷۸۶۲,۹۱۷۱۰۹۱

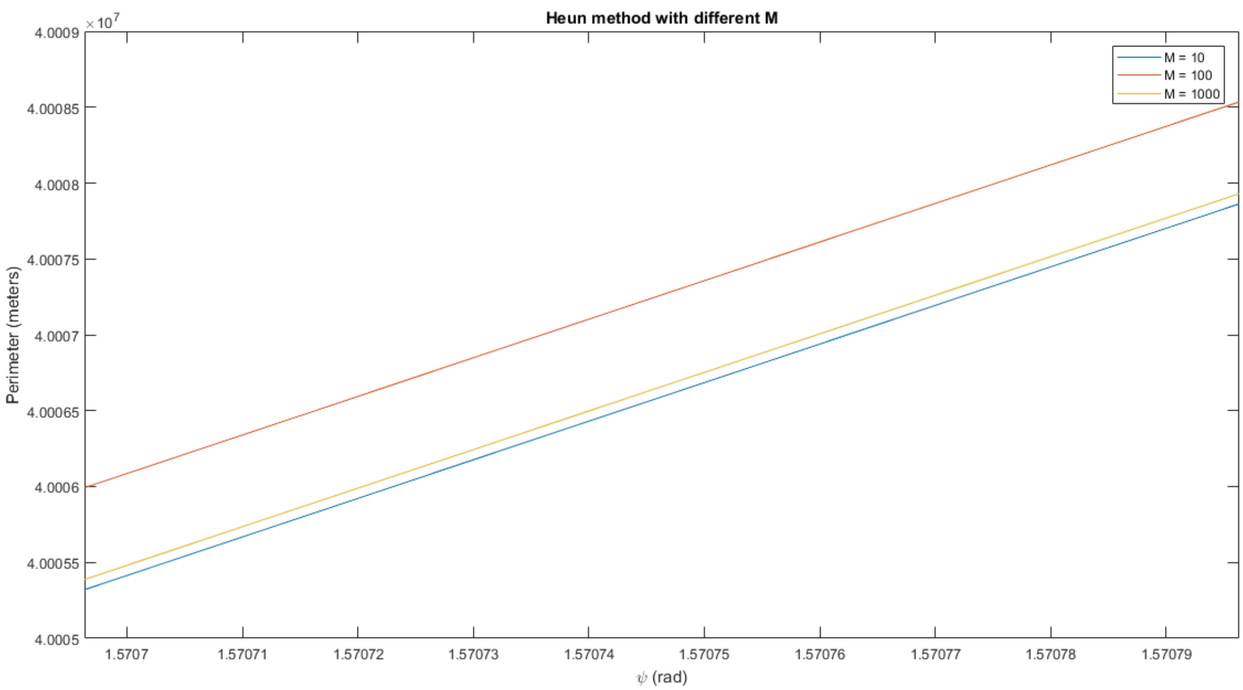
در نهایت با رسم مقادیر به دست آمده برای محیط بیضی در عرض های کاهش یافته مختلف، نمودار زیر حاصل شد. به دلیل نزدیکی مقادیر به دست آمده برای روش های مختلف، در شکل پایین قطعه نزدیک شده این نمودار ها مشاهده میشود.

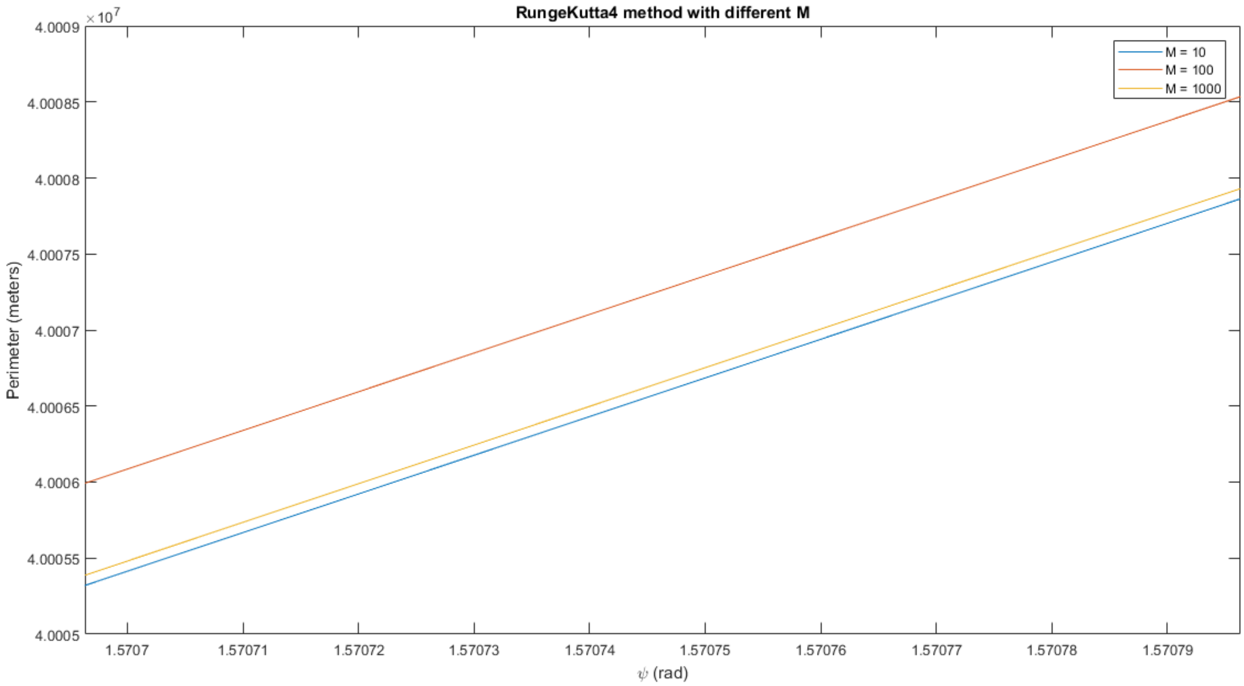


ب) در این قسمت، با دادن طول گام های مختلف نتایج مختلفی ایجاد و نمودار هر سه روش اولر و هیون و رونگ کوتا مرتبه ۴ جداگانه ترسیم شده است. البته به منظور مشاهده بهتر تغییرات به وجود آمده در طول بازه های مختلف، قسمت بسیار کوچکی از تابع ترسیم و به نمایش گذاشته شده است.

در هر سه روش اولر، هیون و رونگه کوتای مرتبه ۴ زمانی که M یا تعداد بازه ها را افزایش میدهیم، به همان نسبت طول گام ها کوچک تر میشود. همین دلیل کافیست تا به این نتیجه برسیم که روش های عددی با افزایش تعداد بازه و کوچک تر کردن طول گام، به نتیجه بهتری میرسند و به تابع اصلی نزدیک تر میشوند.


Euler method with different M
×10^7
4.0015
4.0014
4.0013
4.0012
4.0011
4.001
4.0009
4.0008
4.0007
4.0006
4.0005
Perimeter (meters)
1.5707
1.57071
1.57072
1.57073
1.57074
1.57075
1.57076
1.57077
1.57078
1.57079
ψ (rad)
M = 10
M = 100
M = 1000

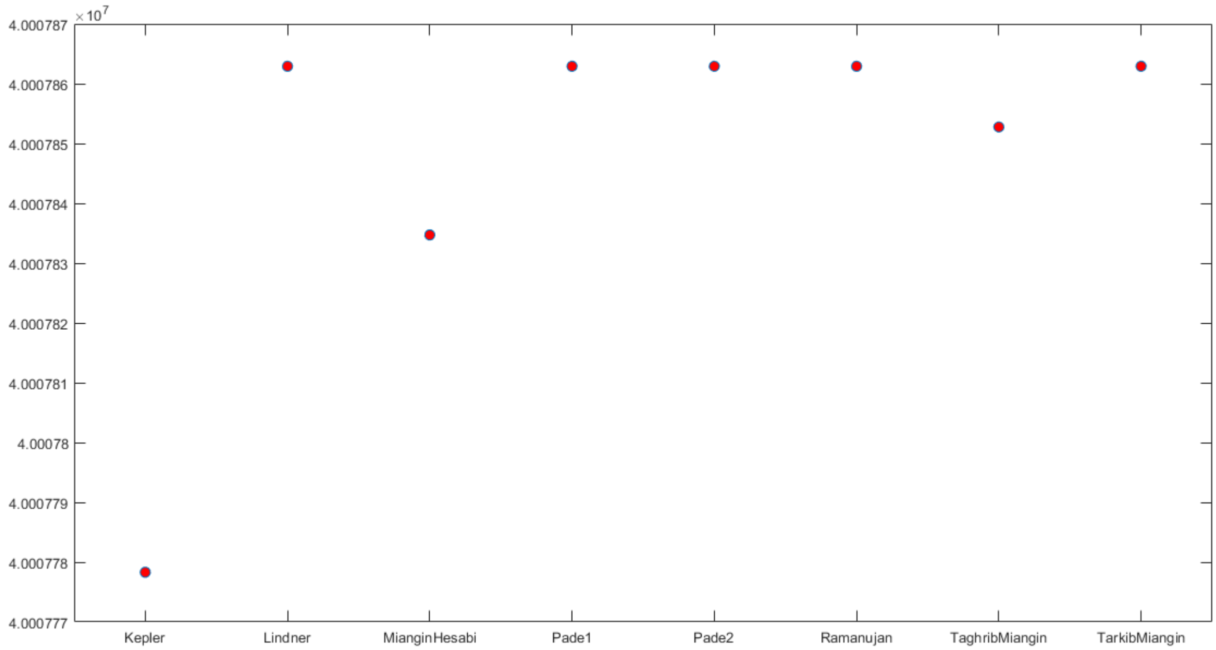

Heun method with different M
×10^7
4.0009
4.00085
4.0008
4.00075
4.0007
4.00065
4.0006
4.00055
4.0005
Perimeter (meters)
1.5707
1.57071
1.57072
1.57073
1.57074
1.57075
1.57076
1.57077
1.57078
1.57079
ψ (rad)
M = 10
M = 100
M = 1000



پ) در بخش بعدی از جدول داده شده، مقدار محیط بیضوی مرجع زمین را محاسبه کردیم. مقادیر بـه دسـت آمده از روش های مختلف به شرح زیر محاسبه شد.

روش	محیط (متر)
روش کپلر	40007778.31
میانگین حسابی	40007834.71
ترکیب میانگین ها	40007862.92
تقریب میانگین ها	40007852.76
لیندر	40007862.92
تقریب دوم رامانوجان	40007862.92
تقریب اول Pade	40007862.92
تقریب دوم Pade	40007862.92

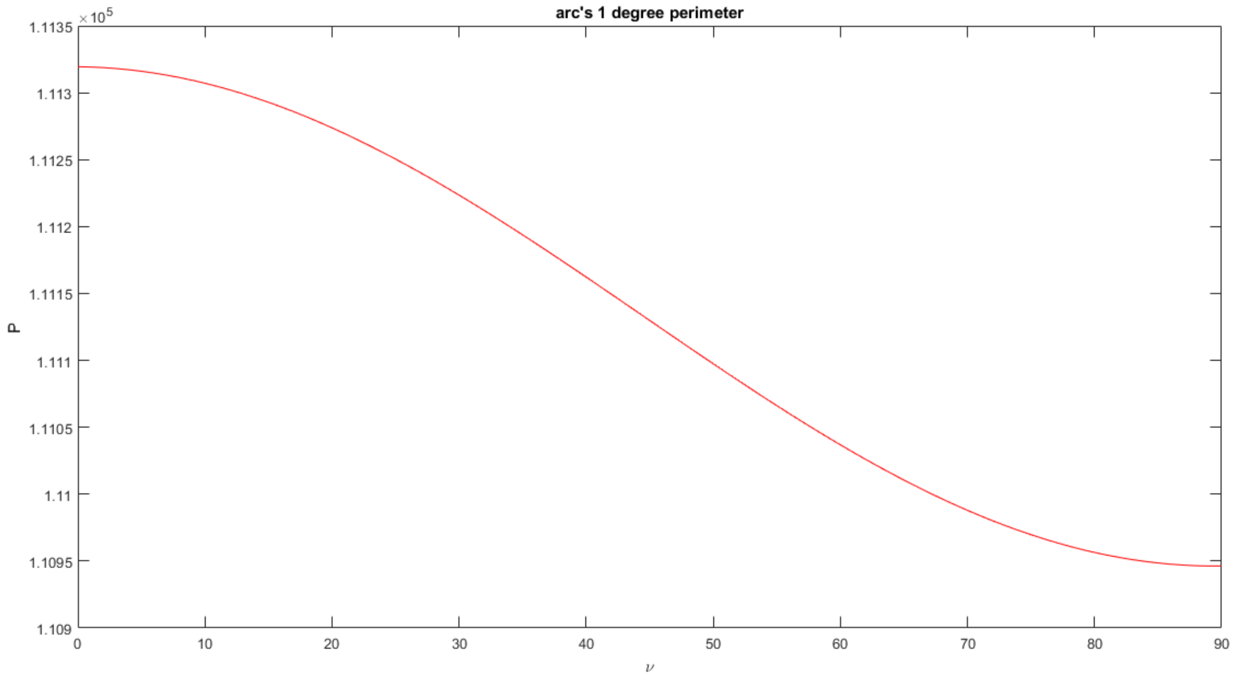
مقادیر به دست آمده از جدول بالا را به صورت گراف در شکل زیر مشاهده میکنید.



محاسبه طول کمان

در این بخش از تمرین به محاسبه طول کمان در ϕ های مختلف میپردازیم. به منظور انجام این کار یک درجه به یک درجه روی عرض جغرافیایی زمین پیش میرویم و روی هر درجه از روش رونگه کوتا برای حل عددی محیط کمان استفاده میکنیم.

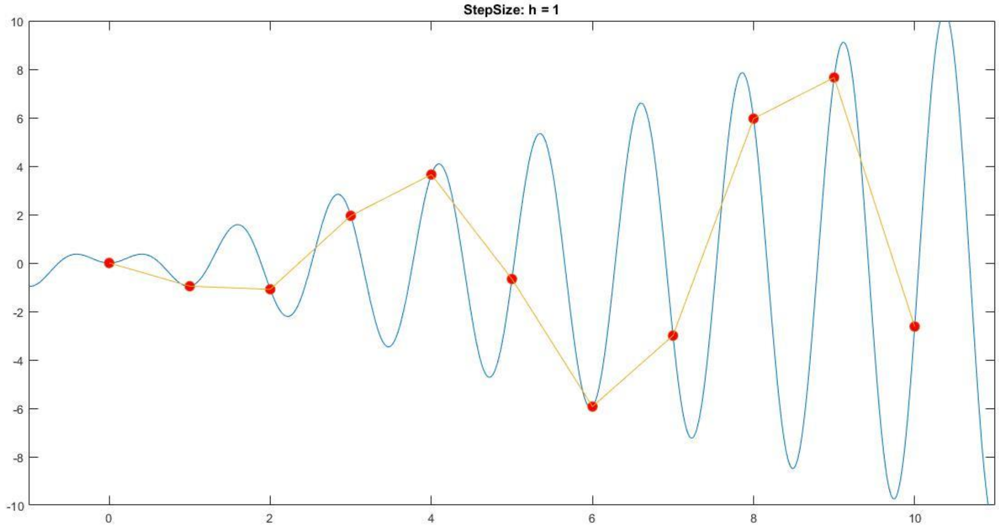
در نهایت مقادیر به دست آمده برای یک درجه از عرض های مختلف جغرافیایی در نمودار زیر آورده شده است.



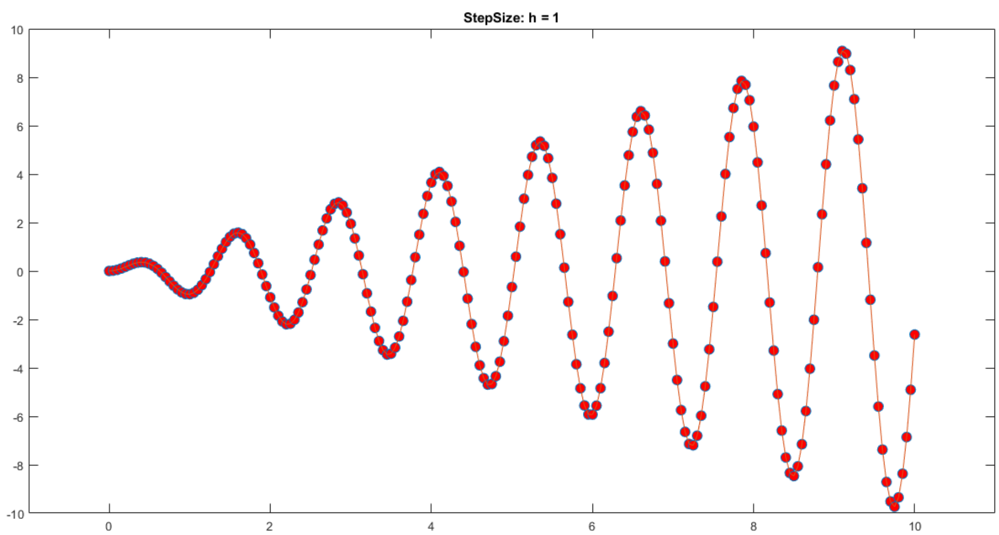
همانطور که مشاهده میشود، به دلیل انحنای بیشتر بیضی در استوا، نسبت به قطبین، محیط یک درجه از کمان روی بیضوی در استوا به مراتب بیشتر از طول ۱ درجه کمان در قطبین است. توجه شود که پارامتر محور افقی ν است که به نوعی متمم عرض ژئودتیک میباشد. بنابراین با افزایش این پارامتر، عرض ژئودتیک کاهش میابد.

سوال ۴) الگوریتم رونگه کوتا تطبیقی (Adaptive Runge kutta)

می دانیم که از رونگه-کوتا برای حل عددی معادلات دیفرانسیل استفاده می کنیم به این صورت که در زمان گام های کوچک بر می‌داریم تا به شکل حدودی تابع نزدیک شویم. در این حال ممکن است به دلیل اندازه گام‌ها در تقریب شکل تابع دچار اشتباه شویم و قسمت های مهم تابع که شامل تغییرات زیادی است را از دست بدهیم. مثلا اگر پستی بلندی در اصل تابع مان موجود داشته باشد نمیتوانیم با رونگه-کوتا متوجه اش شویم و ممکن است به همان مسیر مستقیم ادامه دهیم.



اولین راهی که به ذهن می‌رسد این است که اندازه گام هایمان را کوچک کنیم تا تمامی تغییرات بررسی شوند. اما در صورت استفاده از این روش مقدار محاسبات کامپیوتری ما بیش از حد معمول می‌شوند.



رونگه-کوتا تطبیقی (Runge-Kutta with adaptive step size) روشی از رونگه-کوتا مرتبه چهار است که به صورت هوشمندانه گام ها را انتخاب می کند.

الگوریتم رونگه-کوتا تطبیقی

در این روش ابتدا اندازه گام را نصف می‌کنیم تا ببینیم رفتار تابع تغییر می کند یا نه. اگر رفتار تابع عوض شد با همین گام ادامه می‌دهیم و اگر تابع تغییر زیادی نکرد اندازه گام را دو برابر می‌کنیم و دوباره بررسی می‌کنیم که آیا رفتار تابع تغییر زیادی داشته یا نه. اگر رفتار تابع (با اندازه گام دو برابر شده) تغییر زیادی نکرد، با همین گام ادامه می‌دهیم.

این قابلیت تغییر طول گام در این روش موجب افزایش سرعت در محاسبات و افزایش دقت در حل عددی معادلات دیفرانسیل می شود. زیرا در صورت یکنواخت بودن تابع دیگر نیازی به محاسبات بیشتر نیست و از طرفی دیگر وقتی طول گام را دو برابر می‌کنیم سرعت کارمان بالاتر می‌رود. و همچنین اگر تابع در یک بازه کوتاه، تغییرات زیادی داشته باشد با این روش می‌توان این تغییرات را با تعداد محاسبات معقول تری، به دست آورد.